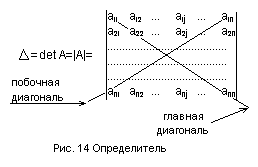
Задание № 2 Определитель квадратной матрицы

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**Определители**

Определение: Определитель - го порядка – это математический объект, представляющий число, вектор или функцию в виде квадратной таблицы, содержащей по  элементов в каждой строке и каждом столбце (рис.14).

Число строк (столбцов) в определителе определяет его порядок. Элементами в определителе могут быть действительные или комплексные числа, а также функции.

 - элемент определителя ( - номер строки, - номер столбца)

Представление векторов и числовых функций с помощью определителей существенно повышает компактность записи математических соотношений и является эффективным способом сокращения вычислений.

**Определение**: *Определителем второго порядка* называется математический объект вида



Левая часть равенства является свернутой (табличной) формой определителя. Правая часть представляет собой определитель в развернутой форме и одновременно правило вычисления определителя в символьной форме.

***Примеры:*** 1) ; 2) ;

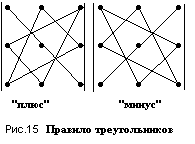
3) ;

**Определение**: *Определителем третьего порядка* называется математический объект, представленный в виде



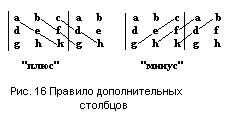
Развернутую форму представления определителя третьего порядка в правой части равенства запоминать не нужно. Ее можно записать и при необходимости вычислить, используя следующие правила:

1. Правило треугольников;
2. Правило дополнительных столбцов (правило Саррюса);
3. Правило разложения по элементам строки или столбца;

Сущность *правила треугольников* легко понять, запомнить и использовать согласно схеме (рис. 15)

Для запоминания *правила дополнительных столбцов* также удобно использовать мнемоническую схему (рис. 16).

Замечание: элементы, перечеркнутые по диагонали, перемножаются. В результате получаем одночлены, которые суммируются или вычитаются согласно схеме.



***Пример:*** Вычислить определитель .

*Решение:* 



*Правило разложения по элементам строки или столбца* является частным случаем способа разложения, который можно использовать для определителя любого порядка. Для определителя третьего порядка правило разложения в символьной форме можно представить так (если разложение производить по элементам первой строки):



,

где  - *миноры* элементов первой строки определителя.

Миноры определителя третьего порядка – это определители второго порядка, которые получаются удалением из исходного определителя элементов строки и столбца, соответствующих индексам минора. В рассмотренном примере миноры  получены удалением элементов первой строки и соответственно первого, второго и третьего столбца.

Разложение определителя можно производить по элементам любой строки или столбца. Знаки слагаемых в разложении определителя располагают в шахматном порядке согласно схеме



*Пример:* разложить определитель по элементам второго столбца





**Решение систем линейных уравнений с помощью определителей (правило Крамера)**

**Определение:** *Системой m линейных уравнений* от n неизвестных называется система уравнений

,

где - постоянные коэффициенты,  - свободные члены (постоянные числа),  - неизвестные, значения которых требуется определить. Первый индекс  числа означает номер уравнения в системе, второй индекс  – номер неизвестного.

*Решением* системы называют множество действительных чисел , которые при подстановке их вместо неизвестных  в каждое уравнение системы, обращают его в тождество.

Если число уравнений равно числу неизвестных , то такую систему называют *крамеровской*. Ее можно решить при определенных условиях с помощью определителей по формулам Крамера.

Для системы 

решения находят по формулам Крамера (при )

,

где:

 - основной определитель из коэффициентов системы;

 - первый вспомогательный определитель, полученный заменой в основном определителе элементов первого столбца соответствующими свободными членами;

- второй вспомогательный определитель, полученный заменой в основном определителе элементов второго столбца соответствующими свободными членами и так далее до определителя  включительно.

*Замечание:* формулы Крамера компактны и удобны при изложении теоретических вопросов. Практическое решение систем по указанным формулам является трудоемким, так как объем вычислений резко возрастает с увеличением порядка определителя.

***Пример:*** Решить систему линейных уравнений

;

Решение: ; ; ; ;

По формулам Крамера получим ; ; 

**Вычисление определителей четвертого и более высоких порядков**

Определители высоких порядков  можно вычислять методом понижения порядка, используя разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца



( разложение по - ой строке)



(разложение по - му столбцу)

 - алгебраические дополнения элементов определителя;  - *алгебраическое дополнение* элемента ,  - минор определителя, полученный удалением из него - ой строки и - го столбца.

Полученные после такого разложения миноры являются определителями - го порядка, которые можно снова разложить по какой-либо строке или столбцу. После многократного разложения придем к минорам третьего или второго порядков, которые вычисляются по правилам, разобранным выше.

Данный алгоритм приводит к большому объему вычислений. Например, вычисление определителя пятого порядка в общем случае сводится к вычислению пяти определителей четвертого порядка после первого разложения или двадцати определителей третьего порядка после второго разложения.

Чтобы уменьшить объем вычислений предварительно производят «обнуление элементов» определителя с использованием следующих свойств:

1) Если в определителе  все элементы какой-либо строки или столбца равны нулю, то .

2) Если в определителе поменять местами две строки или столбца, то определитель изменит знак на противоположный.

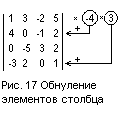
3) Если в определителе имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то определитель равен нулю.

4) Если все элементы какой-либо строки или столбца умножить на одно и то же число, то значение определителя умножится на то же число.

5) Если в определителе имеются две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца, то значение определителя равно нулю.

6) Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то значение определителя не изменится.

***Пример****:* вычислить определитель .

*Решение:* пользуясь свойством 6, получим нули вместо элементов .

Для этого умножим первую строку на (-4) и поэлементно прибавим ко второй строке: -4 -12 8 -20

+ 4 0 -1 2

= 0 -12 7 -18

Затем умножим первую строку на 3 и прибавим к четвертой строке:

3 9 -6 15

+ -3 2 0 1

= 0 11 -6 16

Получим, раскладывая определитель по первому столбцу:

.

Полученный определитель третьего порядка можно уже вычислить по правилу треугольников или по правилу дополнительных столбцов, но можно снова воспользоваться методом «обнуления элементов», примененным выше к определителю четвертого порядка.



.

Были произведены следующие действия:

1. к первой строке прибавили третью
2. к первому столбцу прибавили второй и к третьему столбцу прибавили второй, умноженный на 2
3. разложили определитель по второму столбцу
4. вычислили определитель второго порядка

**Самостоятельная работа:**

**2.1.1** Вычислить определители второго порядка: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ;

**2.1.2.** Вычислить определители второго порядка: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

* + 1. Вычислить определители третьего порядка:

а) ; б) ; в) ; г) ;

**2.1.7.** Вычислить определители четвертого порядка

а) ; б) ; в) ;

**2.1.11.** Решить системы уравнений по правилу Крамера

а) ; б) ; в) ;

**2.1.12.** Решить системы уравнений по правилу Крамера

а) ; б) ; в) ;

**Ответы:**

**2.1.1** а) - 1; б) – 9; в) 0; г) ;

д) ; е) ; ж) 1;

**2.1.2.** а) ; б) ; в) 1; г) 1; д) 0;

**2.1.4.** а) 3; б)-688; в) 15; г) ;

**2.1.7.** а) - 8; б) 90; в) 0;

**2.1.11.** а) ; б) ; в) ;

**2.1.12.** а) ; б) ; в) ;